Sistemas dinámicos

September 1, 2011

- Sistemas de partículas. Sólido rígido y mecánica del continuo

Sistemas de partículas. Sólido rígido y mecánica del continuo

Hasta ahora hemos hablado únicamente de la dinámica de puntos materiales o partículas puntuales.

Reduccionismo mecánico:

Principio del reduccionismo mecánico: Es posible dividir un sistema físico en subsistemas más pequeños identificando los términos correspondientes de fuerza y posición (y de estos últimos, los derivados de velocidad y aceleración) sobre las partes constituyentes correspondientes.

Centro de masa de un sistema de partículas

Consideremos un sistema de N partículas materiales, de vectores de posición respectivos $r_1(t), r_2(t) \cdots, r_N(t)$. Se define su centro de masa como:

$$\boxed{\boldsymbol{r}_{\text{CM}} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \qquad (1)}$$

Es decir, el centro de masa no es más que la media ponderada vectorial de las posiciones de cada una de las partículas que integran el sistema. Dicha media está ponderada en proporción a la masa, de tal manera que si duplicamos la masa de una de las partículas, contribuirá el doble en el nuevo promedio.

Momento lineal, energía y momento angular de un sistema de partículas

$$\boldsymbol{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i$$

$$E = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2 + \sum_{i=1}^{N} V_i^{(\text{ext})}(\boldsymbol{r}_i) + \sum_{i,j=1}^{N} V_{ij}(|\boldsymbol{r}_i - \boldsymbol{r}_j|)$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge \boldsymbol{p}_i$$

Fuerzas exteriores y fuerzas internas. Dinámica del centro de masa

Para un sistema de partículas, supongamos que podemos distinguir para cada partícula la fuerza exterior ejercida por ciertas interacciones externas $\boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})}$ y las fuerzas mutuas que se pueden agrupar en pares $\boldsymbol{F}_{ji}$. $\boldsymbol{F}_{ji}$ se lee como "fuerza ejercida por la partícula j-ésima sobre la partícula i-ésima. La 3ª ley de Newton para la partícula i-ésima se escribe:

$$m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} \tag{2}$$

Sumando en i:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}$$

Pero en la suma $\sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji}$, y para cualquier elección del par i, j tenemos un término correspondiente con los índices permutados. Es decir:

$$\sum_{i,j=1}^{N} \boldsymbol{F}_{ji} = \sum_{1=i<,j}^{N} (\boldsymbol{F}_{ji} + \boldsymbol{F}_{ji}) = 0$$

Un corolario inmediato de la 3ª ley de Newton es que no existen las auto-fuerzas; es decir $\boldsymbol{F}_{ii} = 0$. Véase la sección **??**.

Si llamamos $\sum_{i=1}^{N} m_i = M$ (masa total del sistema de partículas), entonces:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d^2 \boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \right) = \frac{d^2}{dt^2} M \boldsymbol{r}_{\text{CM}} = M \frac{d^2 \boldsymbol{r}_{\text{CM}}}{dt^2}$$

Por lo que se deduce:

$$
\boxed{M\frac{d^2\boldsymbol{r}_{\text{CM}}}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})}} \tag{3}
$$

que es la segunda ley de Newton aplicada al centro de masa del sistema y donde las fuerzas internas han desaparecido y el término $\boldsymbol{F}$ que aparece es la resultante de las fuerzas exteriores. Este teorema es el que justifica que a cierto nivel de descripción podamos olvidarnos de la estructura interna de los sistemas mecánicos y estudiar su movimiento como un todo.

Existe un resultado paralelo para el momento angular. Multipliquemos la ecuación de Newton para la partícula i-ésima 2 vectorialmente por $\boldsymbol{r}_i$ y sumemos en i:

$$
\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{i,j=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{F}_{ji} =
$$

$$
= \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})} + \sum_{1=i<,j}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge(\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_{ij})
$$

Manipulando los índices i y j en el segundo término:

$$
\sum_{1=i<,j}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge(\boldsymbol{F}_{ji}+\boldsymbol{F}_{ij}) = \sum_{1=i<,j}^{N}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\wedge\boldsymbol{F}_{ij}
$$

Esto no es más que la suma de los pares de fuerzas internos. Si llamamos momento de las fuerzas externas a:

$$
\boldsymbol{M}^{(\text{ext})} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge\boldsymbol{F}_i^{(\text{ext})}
$$

tenemos un resultado bastante lógico: que el momento total de todas las fuerzas es la resultante de los momentos externos más la de los internos:

$$
\boxed{\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{r}_i\wedge m_i\frac{d^2\boldsymbol{r}_i}{dt^2} = \boldsymbol{M}^{(\text{ext})} + \sum_{1=i<,j}^{N}(\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j)\wedge\boldsymbol{F}_{ij}} \tag{4}
$$

Observación: el 1$^{\text{er}}$ término depende de la elección del origen, pero el segundo término es independiente de tal elección.

Sólido rígido

Un sólido rígido es un sistema de partículas sometido a la ligadura de que la distancia entre dos cualesquiera de estas partículas permanece constante:

$$
|\boldsymbol{r}_i-\boldsymbol{r}_j| = \text{const.}
$$

Un sistema con estas características define un campo de velocidades $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{r})$ cuando el movimiento se refiere a un punto fijo cualquiera del sólido, ya que fijada la posición de este punto, lo único que pueden hacer los demás puntos del sólido es rotar respecto al mismo. El campo de velocidades definido por un sólido rígido es:

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r} \tag{5}$$

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge m_i \boldsymbol{v}_i = \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge (m_i \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_i)$$

donde hemos utilizado el campo rotacional de velocidades (5) para expresar la velocidad de la partícula i-ésima. Usando la identidad $\boldsymbol{a} \wedge (\boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, tenemos:

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{r}_i \wedge (m_i \boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{r}_i \wedge (\boldsymbol{\omega} \wedge \boldsymbol{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[r_i^2 \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{r}_i (\boldsymbol{r}_i \cdot \boldsymbol{\omega}) \right]$$

Lo que hemos demostrado es que el momento angular de un sólido rígido referido a su centro de masa es proporcional a la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, es decir, es lineal en $\boldsymbol{\omega}$, pero no necesariamente tiene la misma dirección. Esta relación de linealidad genérica es lo que se conoce en matemáticas como una expresión matricial. En una notación más compacta:

$$\boxed{L = I \boldsymbol{\omega} \qquad (6)}$$

donde:

$$I \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} \sum_i m_i \left(r_i^2 - x_i^2 \right) & -\sum_i m_i x_i y_i & -\sum_i m_i x_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i y_i & \sum_i m_i \left(r_i^2 - y_i^2 \right) & -\sum_i m_i y_i z_i \\ -\sum_i m_i x_i z_i & -\sum_i m_i y_i z_i & \sum_i m_i \left(r_i^2 - z_i^2 \right) \end{pmatrix}$$

es la *matriz de inercia* del sólido rígido. No es difícil demostrar, con un poco de gimnasia de índices, que la energía cinética de rotación de un sólido rígido es:

$$\boxed{K_{\text{rot}} = \frac{1}{2} \omega^T I \omega \qquad (7)}$$