Leyes de Newton. Mecánica

September 1, 2011

- Introducción
- Leyes de Newton
- Partícula puntual. Posición, velocidad y aceleración
- Energía y momento lineal
- Momento angular
- Principio de Relatividad de Galilei
- Limitaciones a las leyes de Newton impuestas por la electrodinámica

Introducción

La Mecánica es la parte de la Física que estudia *el movimiento de los cuerpos mediante el análisis de sus causas* (fuerzas) en términos matemáticos. En los albores de la Física, desde los griegos (Aristóteles, Euclides, Pitágoras, Arquímedes) hasta el final de la Edad Media (Copérnico, Kepler, Galileo), el estudio del movimiento se había centrado más bien en la Cinemática (con la posible excepción de Arquímedes), es decir, la simple descripción del movimiento en términos de geometría. Todo esto cambia con Isaac Newton. A partir de Newton, existe la posibilidad de *predecir* el movimiento de los cuerpos.

Leyes de Newton

Partícula puntual. Vectores de posición, velocidad y aceleración

La descripción del movimiento de un *punto material* o partícula se da mediante la especificación de una función vectorial del parámetro tiempo t. Dicho parámetro tiene un *carácter absoluto* (es independiente del sistema de referencia; véase la sección Principio de relatividad de Galilei).

$$\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \tag{1}$$

En esta idealización, los sistemas físicos son puntos matemáticos, y por tanto carecen de estructura interna. Su estado en todo momento está dado por las proyecciones sobre unos ejes cartesianos de referencia: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$. Si conocemos estas tres funciones para todo instante de tiempo, entonces conocemos toda la historia del sistema. Esta descripción es demasiado optimista: normalmente uno no conoce de partida la historia de un punto material (su posición para todo t).

Pero supongamos por un momento que ya hemos resuelto el problema dinámico y conocemos la trayectoria del punto material, $\boldsymbol{r}(t)$. Los vectores de velocidad y aceleración en cada instante t se definen como las sucesivas derivadas temporales:

$$\boldsymbol{v}(t) = \frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt} = (\dot{x}(t), \dot{y}(t), \dot{z}(t)) \tag{2}$$

$$\boldsymbol{a}(t) = \frac{d\boldsymbol{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\boldsymbol{r}(t)}{dt^2} = (\ddot{x}(t), \ddot{y}(t), \ddot{z}(t)) \tag{3}$$

Las leyes de Newton garantizan que no sea necesario conocer de partida las variaciones temporales de orden arbitrariamente alto de estas funciones coordenadas, bastando especificar la posición y velocidad iniciales del punto material para reconstruir el movimiento completo. Esto es debido a que una relación entre fuerza y aceleración nos permite ir más allá de una mera definición sin más a una verdadera herramienta matemática predictiva mediante la especificación de una *ley de fuerza,* $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$.

Las leyes de Newton son:

I. Toda partícula libre permanece en reposo o se mueve con movimiento rectilíneo y uniforme (a velocidad constante):

$$\boldsymbol{F} = 0 \Rightarrow \boldsymbol{v} = \text{const.} \tag{4}$$

II. La fuerza sobre una partícula es el producto de su *masa inercial* por la aceleración de la misma:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \tag{5}$$

III. Principio de acción y reacción: La fuerza que ejerce la partícula 1 sobre la partícula 2 es igual en magnitud y opuesta en dirección a la fuerza recíproca) y se sitúa en la línea que une ambas.

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{6}$$

Observaciones:

(i) La ley (I) es una consecuencia inmediata de la II, y la ley III viene a ser viene a ser una expresión de que el sistema compuesto por dos subsistemas 1 y 2 nunca produce una fuerza neta como resultado de fuerzas mutuas: $\boldsymbol{F}_{12} + \boldsymbol{F}_{21} = 0$, con lo que es la expresión de la ley I para el sistema compuesto 1+2.

(ii) La masa inercial así definida no tiene nada que ver con la llamada masa gravitatoria, que define el acoplamiento gravitatorio de dos cuerpos por medio de la *ley de Gravitación universal:*

$$\boldsymbol{F} = -G\frac{m_g m'_g}{r^2}\boldsymbol{e}_r \tag{7}$$

(donde $\boldsymbol{e}_r \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\boldsymbol{r}}{r}$ es el vector unitario en la dirección que une los centros de masa de ambos cuerpos y va de m'_g a m_g, el cuerpo cuyo movimiento estamos considerando.)

Es una ley física llamada *Principio de Equivalencia* la que afirma que ambas masas son proporcionales: $m_g = \lambda m$ con una constante universal λ que las relaciona. Por ser universal, esta constante siempre se puede elegir como la unidad, con lo que se justifica el nombre de *masa* para ambos parámetros. Si esto no fuera así, la cantidad m_g en (7) nunca se habría llamado *masa,* sino probablemente *carga gravitatoria.*

(iii) Si conocemos la ley de fuerza, que en su forma más general adopta la forma $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t)$, entonces es posible plantear el problema dinámico como una ecuación diferencial:

$$m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}, t) \tag{8}$$

Esta ecuación puede siempre resolverse con datos iniciales $\boldsymbol{r}(t_0)$ y $\boldsymbol{v}(t_0)$ al menos en un intervalo y siempre que la función $\boldsymbol{F}$ sea suficientemente regular (básicamente que la función $\boldsymbol{F}$ sea diferenciable en torno a la condición inicial).

Energía y momento lineal

Siempre es posible en principio reducir el estudio de un sistema mecánico a la resolución de las ecuaciones de Newton. Sin embargo, en muchas ocasiones resulta conveniente hacerlo mediante el uso de *cantidades conservadas;* es decir, ciertas funciones de las coordenadas y las velocidades que se mantienen constantes en el curso de la evolución, de la forma:

$$\begin{gathered} f_1(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N) = 0 \\ f_2(\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \cdots, \boldsymbol{r}_N, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \cdots, \boldsymbol{v}_N) = 0 \\ \cdots \end{gathered}$$

Si existiera un número suficiente de tales funciones, el movimiento estaría determinado para todo t. Si el sistema es autónomo (el tiempo no aparece explícitamente en la dinámica, sino solo implícitamente en las coordenadas y velocidades) bastará un número $6N - 1$ de tales condiciones para resolverlo. En general, el movimiento de los sistemas dinámicos no es resoluble de esta forma, pero si así ocurre se dice que el sistema *se ha reducido a cuadraturas.*

Esta es una lista de las cantidades conservadas que aparecen en mecánica con más frecuencia, tres de ellas fundamentales o universales y otras dos más exóticas:

- Momento lineal (universal)
- Energía (universal)
- Momento angular (universal)
- Virial
- Vector de Runge-Lenz

Las tres primeras son universales. La 4ª es una cantidad conservada de los gases ideales y de cualquier sistema que sea invariante bajo dilataciones, y la 5ª es una cantidad conservada en potenciales centrales, como el problema de Kepler o el átomo de hidrógeno.

Momento lineal de un punto material

Definimos el momento lineal de una partícula como el producto de su masa por su velocidad:

$$\boldsymbol{p} \stackrel{\text{def}}{=} m\boldsymbol{v} \tag{9}$$

Trabajo

Se define el *trabajo* ejercido por la fuerza $\boldsymbol{F}$ para llevar la partícula del punto de coordenadas $\boldsymbol{r}_1$ al punto de coordenadas $\boldsymbol{r}_2$ como:

$$W_{1,2} \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{10}$$

Observaciones:

El trabajo depende en general no solo de los puntos inicial y final, sino de la trayectoria seguida para ir de uno al otro.

Si varias fuerzas actúan a la vez sobre una partícula material, la definición se puede extender aditivamente, de forma que el trabajo total (trabajo realizado por la resultante) es igual a la suma de los trabajos individuales realizados por cada una de las componentes.

En algunos textos se encuentra la expresión "trabajo ejercido *contra* la fuerza $\boldsymbol{F}$", para dar cuenta del signo negativo en (10). Esta distinción puramente filosófica es en realidad innecesaria, pues el signo se reduce a una cuestión de convención, y cuando las fuerzas son conservativas (véase más adelante) no tiene en realidad interés distinguir quién realiza la fuerza. Hemos de decir, no obstante, que la elección de signo en (10) es universal.

Energía cinética

La energía cinética de una partícula puntual se define como:

$$\boxed{K \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} m v^2 \qquad (11)}$$

donde $v^2 \stackrel{\text{def}}{=} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{v} = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$

Energía potencial. Fuerzas conservativas. Teorema de conservación de la energía

Hemos dicho anteriormente que el trabajo depende del camino que recorre la partícula para ir de un punto a otro. Denotando dicho camino por Γ, en realidad deberíamos haber escrito la definición de trabajo en términos de su verdadera dependencia:

$$W[\Gamma] \stackrel{\text{def}}{=} -\int_{\Gamma} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

Tiene sentido preguntarse por la existencia de campos de fuerza para los cuales esta integral de línea sea especialmente simple, en particular dependa solo de los puntos inicial y final. El teorema matemático que garantiza esto se llama teorema del gradiente, que asegura que si un campo vectorial $\boldsymbol{F}$ tiene integral de línea nula sobre cualquier trayectoria cerrada, lo que se representa:

$$\oint \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = 0 \tag{12}$$

entonces $\boldsymbol{F}$ puede escribirse como el gradiente de un campo escalar V:

$$\boldsymbol{F} = -\nabla V(\boldsymbol{r}) \tag{13}$$

(de nuevo el signo negativo es una convención.)

Observaciones:

Teorema de conservación de la energía mecánica

Supongamos que una partícula puntual se mueve desde una posición $\boldsymbol{r}_1$ hasta una posición $\boldsymbol{r}_2$ bajo la acción de una fuerza conservativa. Usando la definición de trabajo y (13):

$$\begin{aligned} W_{1,2} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = V(\boldsymbol{r}_2) - V(\boldsymbol{r}_1) = \\ = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} \cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\boldsymbol{r}_1}^{\boldsymbol{r}_2} m\,\frac{d\boldsymbol{r}}{dt} \cdot d\boldsymbol{v} = -m\int_1^2 \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{v} \\ = -m\int_1^2 v\,dv = K_1 - K_2 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_1^2 + V(\boldsymbol{r}_1) = \frac{1}{2}mv_2^2 + V(\boldsymbol{r}_2) \qquad (14)}$$

La cantidad $E \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}mv^2 + V(\boldsymbol{r})$ se llama *energía total* (mecánica) de una partícula puntual en un campo conservativo de energía potencial $V(\boldsymbol{r})$. La hemos deducido para dos puntos arbitrarios de la trayectoria. Demostremos la versión continua; es decir, que la derivada temporal de la cantidad:

$$\boxed{E = \frac{1}{2}mv^2 + V(\boldsymbol{r}) \qquad (15)}$$

es nula. En efecto:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V(\boldsymbol{r})\right) = m\boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{v}} + \boldsymbol{\nabla} V \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \\ = \boldsymbol{v} \cdot \dot{\boldsymbol{p}} + \boldsymbol{\nabla} V \cdot \dot{\boldsymbol{r}} = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = 0 \end{aligned}$$

que corrobora el resultado obtenido punto a punto.

Momento angular. Teorema de conservación del momento angular

El momento angular de una partícula masa m, posición $\boldsymbol{r}$ y momento lineal $\boldsymbol{p}$ se define como:

$$\boxed{\boldsymbol{L} \overset{\text{def}}{=} \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p} \qquad (16)}$$

Para una partícula libre, no solo el momento lineal p es una constante. También lo es la combinación de las coordenadas y el momento lineal definida en (16). En efecto:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \frac{d}{dt}(\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{p}) = \boldsymbol{v} \wedge m\boldsymbol{v} + \boldsymbol{r} \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{p}$$

El 1^{er} término es cero por ser el producto vectorial de dos vectores proporcionales, y el segundo lo es por ser $\dot{\boldsymbol{p}} = \boldsymbol{F} = 0$ (partícula libre).

Existen casos en que se conserva el momento angular aunque la partícula esté sometida a una fuerza. Un ejemplo es el problema de Kepler (un planeta en órbita gravitatoria alrededor del Sol). La fuerza en este caso es $\boldsymbol{F} = -G\frac{mm_{\odot}}{r^2}\boldsymbol{e}_r$, con lo que tenemos:

$$\frac{d}{dt}\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \wedge \frac{d}{dt}\boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{F} = -G\frac{mm_{\odot}}{r^2}\boldsymbol{r} \wedge \frac{\boldsymbol{r}}{r} = 0$$

Aquí la conservación del momento angular se debe a la existencia de una simetría en el problema, y es común a todos los campos de fuerzas centrales, ya que lo único que hemos utilizado es la perpendicularidad entre $\boldsymbol{F}$ y $\boldsymbol{r}$. Esta es una característica general de todos los sistemas dinámicos lagrangianos: *la existencia de una simetría continua implica la existencia de una función de coordenadas y velocidades que se mantiene constante* (constante del movimiento; véase Teorema de Noether).

Ejemplo: Problema de Kepler

Leyes de Kepler:

K1. La órbita de todo planeta es una elipse, con el Sol situado en uno de sus focos.

K2. La línea que une un planeta con el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales

K3. El cuadrado del período orbital de un planeta es directamente proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita.

La 2ª ley de Kepler es en realidad, como hemos dicho, la conservación del momento angular. En efecto, el área que barre dicha línea por unidad de tiempo es $\frac{1}{2}r\frac{rd\theta}{dt} = \frac{1}{2}r^2\omega = \text{const.}$ Pero $\frac{1}{2}r^2\omega = \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \wedge (\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{\omega})\right| = \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{r} \wedge \boldsymbol{v}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{r}\wedge\boldsymbol{p}}{2m}\right| = \left|\frac{\boldsymbol{L}}{2m}\right|$

La 3ª ley depende específicamente de que la fuerza es del tipo $\propto r^{-2}$ (inversa del cuadrado). Suponiendo órbitas circulares para simplificar, dado que $\omega = \frac{2\pi}{T}$, podemos escribir:

$$\frac{mv^2}{r} = G\frac{mm_\odot}{r^2} \Rightarrow \frac{r^2\omega^2}{r} = G\frac{m_\odot}{r^2} \Rightarrow \frac{r^3}{T^2} = \frac{Gm_\odot}{4\pi^2}$$

donde hemos partido de la identificación entre fuerza centrípeta y gravitatoria y el resultado indica que la proporción entre el cubo de la distancia y el cuadrado de los periodos no depende de las condiciones iniciales, y por lo tanto es la misma para cualquier objeto astronómico en una órbita circular.

Principio de relatividad de Galilei

Al escribir las ecuaciones (4), (5) y (6) podíamos habernos preguntado en qué sistema de referencia son válidas. Es obvio que el concepto de partícula libre definido por estas leyes no cambia si nos vamos a un sistema de referencia que a su vez se mueve con velocidad constante respecto al 1^{er} sistema en el que estas leyes se suponen válidas, pues su velocidad seguirá siendo constante. Si las coordenadas de la partícula en dicho sistema inicial S de origen O son x, y, z, las correspondientes a un sistema S' con origen O' que se desplaza a velocidad constante v respecto al primero en la dirección positiva del eje de las x se transforman según las:

Transformaciones de Galilei

Fue Galileo Galilei el primero en preguntarse cómo correlacionan los distintos observadores las leyes físicas tal como las perciben en su cuadro de referencia en su famoso experimento mental del barco en 1638:

> Encerraos con un amigo en la cabina principal bajo la cubierta de un barco grande, y llevad con vosotros moscas, mariposas, y otros pequeños animales voladores [...] colgad una botella que se vacíe gota a gota en un amplio recipiente colocado por debajo de la misma [...] haced que el barco vaya con la velocidad que queráis, siempre que el movimiento sea uniforme y no haya fluctuaciones en un sentido u otro. [...] Las gotas caerán [...] en el recipiente inferior sin desviarse a la popa, aunque el barco haya avanzado mientras las gotas están en el aire[...] las mariposas y las moscas seguirán su vuelo por igual hacia cada lado, y no sucederá que se concentren en la popa, como si cansaran de seguir el curso del barco[...]
>
> *Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo*
>
> Galileo Galilei

La observación anterior que Galilei pone en boca de Salvatius se expresa matemáticamente como:

$$\begin{aligned} x' &= x - vt \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= t \end{aligned}$$

Es decir, la lectura que ambos observadores en movimiento relativo uniforme hacen de las coordenadas (obsérvese que incluimos el tiempo como una coordenada más) se reduce a la adición de un "término de arrastre" proporcional al tiempo transcurrido, que ha de contarse igual en ambos sistemas de referencia (véase fig. 1). Si $\boldsymbol{v}$ tiene una dirección arbitraria, pueden escribirse de forma más general como:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t$$

Y por último, si ambos observadores se diferencian además en un cambio de orientación (rotación) constante de matriz de rotación R_{ij} y una traslación constante que indica su separación vectorial en el instante t=0, sus observaciones de las coordenadas se relacionan mediante la expresión más general de un elemento del grupo de Galilei (véase más adelante).

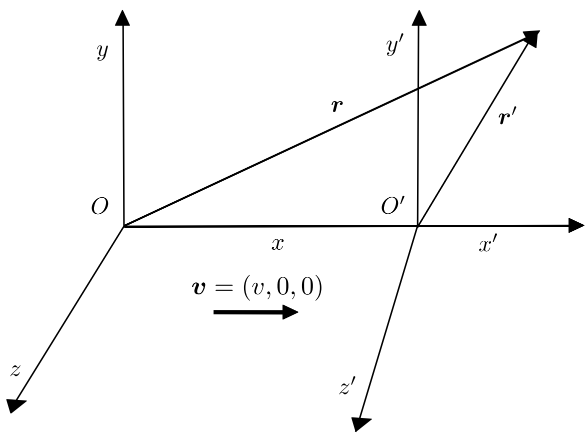

Figure 1: Las observaciones de la coordenada x leída por los observadores O y O' se diferencian en un término que aumenta proporcionalmente al tiempo.

Es inmediato ver que la 2ª ley de Newton sigue cumpliéndose si decretamos que tanto la masa como el vector de fuerza no cambian bajo las transformaciones de Galilei; esto es, $\boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}') = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{F}'(\boldsymbol{r}') = m\frac{d^2\boldsymbol{r}'}{dt'^2} = m\frac{d^2}{dt'^2}(\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t) = m\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$$

Grupo de Galilei

Las transformaciones más generales que preservan las ecuaciones de Newton constituyen un grupo. Un elemento cualquiera del grupo de Galilei está caracterizado por 9 parámetros reales, y la transformación más general de este tipo se da en términos de una rotación (3 parámetros) y un desplazamiento del origen de coordenadas a velocidad constante (otros 3 parámetros), a los que se añade una traslación arbitraria fija del origen de coordenadas, $\boldsymbol{r}_0$, y se escribe:

$$\boldsymbol{r}' = R\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}t + \boldsymbol{r}_0$$

Veamos que en efecto esta ley de transformación constituye un grupo.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}' &= R_1\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_1 t + \boldsymbol{r}_1\\ \boldsymbol{r}'' &= R_2\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{r}_2\end{aligned}$$

La composición de las dos transformaciones de parámetros respectivos $(R_1, \boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{r}_1)$ y $(R_2, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{r}_2)$ está dada por:

$$\boldsymbol{r}'' = R_2\boldsymbol{r}' - \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{r}_2 = R_2\left(R_1\boldsymbol{r} - \boldsymbol{v}_1 t + \boldsymbol{r}_1\right) - \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{r}_2 = R_2R_1\boldsymbol{r} - R_2\boldsymbol{v}_1 t + R_2\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{v}_2 t + \boldsymbol{r}_2$$

La composición da unos valores para los parámetros de rotación R_{ij}, arrastre o *boost* $\boldsymbol{v}$ y traslación constante $\boldsymbol{r}_0$:

$$\begin{aligned}R &= R_2R_1\\ \boldsymbol{v} &= -R_2\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\\ \boldsymbol{r}_0 &= R_2\boldsymbol{r}_1 + \boldsymbol{r}_2\end{aligned}$$

La inversa de una transformación galileana de parámetros $(R, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{r}_0)$ es la transformación de parámetros $\left(R^{-1}, -R^{-1}\boldsymbol{v}, -R^{-1}\boldsymbol{r}_0\right)$. La transformación identidad tiene los parámetros $(I, \boldsymbol{v} = 0, \boldsymbol{r}_0 = 0)$, donde I representa a la matriz identidad.

Limitaciones a las leyes de Newton impuestas por la electrodinámica

Antes de llegar a las limitaciones más fundamentales que llevaron a la formulación de la Mecánica Cuántica, la mecánica newtoniana se topó con diversas dificultades que llevaron a Einstein, Lorentz, Poincaré y Minkowski a construir la Teoría Especial de la Relatividad, que es el marco geométrico en el que se encuadra la electrodinámica. Sorprendentemente, la generalización de todos los conceptos dinámicos, como fuerza, energía o momento lineal es casi inmediata. Incluso la ley del movimiento (la segunda ley de Newton) sobrevive a esta generalización.

Existen varios conceptos y principios en la mecánica de Newton que han resultado ser obstáculos irresolubles para cualquier descripción que pretenda ser más detallada o menos ingenua de la realidad física debido a simplificaciones excesivas que solo con el paso de varios siglos llegaron a solventarse, al menos parcialmente. Los más relevantes son:

- *Autofuerza:* La fuerza que ejerce una partícula sobre sí misma no es estrictamente nula. Es necesario algún tipo autofuerza para explicar la reacción de la radiación. Dado que un electrón acelerado radía ondas electromagnéticas, es necesario que se frene espontáneamente para dar cuenta del hecho obvio de que no puede radiar indefinidamente. Este problema lo trata rigurosamente la Electrodinámica Cuántica.

- *Propagación de las interacciones a velocidad finita:* El principio de acción y reacción requiere que una partícula detecte instantáneamente el cambio de posición de otra que se halla en su presencia para que el balance entre acción y reacción se mantenga todo el tiempo. Este problema lo trata rigurosamente la electrodinámica al incluir el campo electromagnético en el balance de las cantidades conservadas. De forma más rigurosa y consistente con nuestro conocimiento actual de las leyes fundamentales de la Naturaleza, que no pueden ignorar la Mecánica Cuántica, este problema es resuelto por la Electrodinámica Cuántica.

- *La rigidez de los sólidos es incompatible con la causalidad relativista.* En efecto, para que las distancias se mantengan constantes en presencia de interacciones que tienden a desplazar los cuerpos como un todo, una repentina aceleración de una de sus partes tendría que propagarse a velocidad infinita a través del cuerpo para que se acelere como un todo consistentemente con la ligadura de distancia constante.

- *El concepto de partícula puntual es inconsistente con la electrodinámica.* En realidad, ningún modelo de partícula rígida es consistente con las simetrías de la electrodinámica. En un primer intento de resolver este problema, podría pensarse que lo más natural es suponer que el electrón (y cualquier partícula elemental, por el mismo motivo) es una especie de sustancia continua con propiedades elásticas. Henri Poincaré trató de dar base matemática a esta imagen mediante su modelo de electrón extenso con fuerzas de cohesión interna (llamadas fuerzas de Poincaré), pero la imagen correcta según los principios cuánticos es que la entidad matemática que representa al electrón es lo que se llama un campo cuántico relativista, el paradigma teórico sobre el que se basa la moderna Teoría Cuántica de Campos.