La dinámica analítica

September 1, 2011

- Espacio de fases. Principio de conservación de la información

Espacio de fases. Principio de conservación de la información

Cuando la mecánica se expresa en función de las llamadas variables canónicas (posición y momento generalizados), emerge un principio tan profundo de la dinámica que raras veces se expresa explícitamente. Es lo que el físico Leonard Susskind ha acuñado como *principio de conservación de las distinciones.* Existen otras formas de frasear este principio: principio de conservación de la entropía microscópica (o de grano fino), o más rigurosamente quizá, teorema de Liouville. Lo que viene a decir es que *condiciones dinámicas diferentes permanecen diferentes en el transcurso de la evolución temporal.*

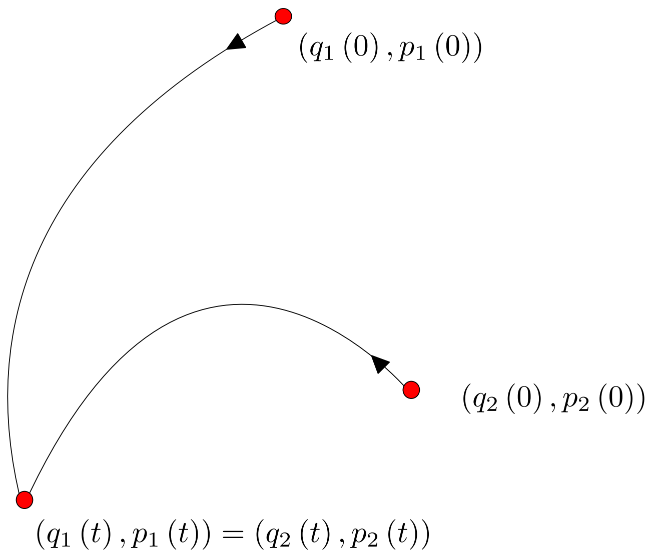

Figure 1: Conservación de las distinciones. Dos condiciones iniciales para la coordenada q y su momento asociado p no pueden en ningún instante cruzarse en el curso de la evolución temporal. *En la imagen se representa una situación imposible en mecánica.*

Espacio de fases de un sistema dinámico

En los siglos XVIII y XIX la mecánica recibió un impulso considerable que la separó de la formulación inicial intuitiva y fácilmente visualizable de Newton, basada en conceptos como fuerza, momento lineal y angular, etc. Esta nueva formulación es lo que se conoce como dinámica analítica, y se debe fundamentalmente a los trabajos de Lagrange, Euler, Poisson, Hamilton y otros, muchos de ellos matemáticos preocupados en dar generalidad al formalismo de la mecánica y crear herramientas matemáticas para su estudio que permitieran simplificar problemas complejos, así como investigar relaciones geométricas que pudieran estar implícitas en la consideración de los sistemas dinámicos como variedades diferenciables y que no serían evidentes en la formulación vectorial de Newton. Conviene recordar que el formalismo de Newton todavía no era usado en la forma vectorial invariante impuesta por Oliver Heaviside en el siglo XIX, y las ecuaciones se escribían en coordenadas, con la aparatosidad que esto supone. Otra cuestión de singular importancia en esta nueva expresión de la mecánica es el énfasis en el aspecto *local* de las leyes de la física, lo que se manifiesta en el abundante uso de relaciones expresadas en términos de *transformaciones infinitesimales,* es decir, de las relaciones entre las variables físicas en el entorno de un punto.

La idea inicial de la dinámica analítica es eliminar las variables de la mecánica que no intervienen explícitamente en las leyes del movimiento debido a que están sujetas a ligaduras, siendo por tanto ignorables.

El ejemplo más inmediato es el péndulo simple: una partícula moviéndose en un plano y fijada al extremo de una cuerda bajo una energía potencial gravitatoria $V(x, y)$.

La mecánica de Newton describe este caso como:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ m\ddot{y} &= -\frac{\partial V}{\partial y} \end{aligned}$$

La dinámica analítica de Lagrange se basa en observar que basta la asignación de una sola variable, el ángulo θ, para describir el movimiento del sistema.

$$\begin{aligned} x &= l\cos\theta \\ y &= l\sin\theta \end{aligned}$$

Coordenadas generalizadas

Fuerzas generalizadas

$$Q_j \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial V}{\partial q_j}$$

La clave del método de Lagrange es observar que las fuerzas que obligan al sistema a permanecer sujeto a una ligadura especialmente simple, llamada holónoma, no realizan trabajo.

$$\delta W = \sum_j \frac{\partial K}{\partial q_j}\delta q_j$$

El método de Lagrange se basa en la construcción de una función llamada función lagrangiana del sistema. Es la diferencia entre la energía cinética y la energía potencial:

$$L = K - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - V(l\cos\theta, l\sin\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$

Expresamos ahora, por ejemplo, la energía potencial gravitatoria $V = mgy = mgl\cos\theta$, lo que da:

$$ml^2\ddot{\theta} - mgl\sin\theta$$

que es la ecuación del péndulo.

Ecuaciones de Hamilton

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j} \tag{1}$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j} \tag{2}$$